USO DE TECNOLOGÍA PARA LA DIFERENCIACIÓN A TRAVÉS DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN PARTE I

TECHNOLOGY-BASED DIFFERENTIATION PROCESS THROUGH THE VARIATION CONCEPT PART I

Oscar Ruiz Chávez, Sergio Flores García[1*], Juan Luna González, María D. González Quezada, María C. Salazar Álvarez, María A. Cruz Quiñones, y Osiel Ramírez Sandoval

RESUMEN

En los cursos de cálculo diferencial y física se estudian conceptos de manera inicial como: función, derivada de la función, velocidad y aceleración, representados sobre una curva plana. El tratamiento inicial incorpora fórmulas de diferenciación. Estas expresiones se presentan de una forma poco adecuada, haciendo que se vea limitada una parte de la formación de estos conceptos. El presente documento describe un algoritmo para la obtención de la fórmula de diferenciación de la función $f(x) = x^n$. Esto se logra a través del uso de diferencias, aproximaciones y el planteamiento de un modelo matricial. Además, se incorpora su resolución por determinantes y la regla de Cramer. La comprobación del modelo matricial se realiza con un software de manejo de hoja electrónica Excel. Finalmente, en el intento por caracterizar los fenómenos de movimiento se inicia con tablas de valores, por ejemplo, un objeto en caída con su altura en función del tiempo.
Palabras Clave: Diferenciación por diferencias, variación, función, cálculo diferencial, Excel.

ABSTRACT

The concepts of function, derivative, velocity and acceleration are covered at the beginning of introductory Calculus and Physics courses. The initial approach incorporates differentiation equations. These expressions do not achieve a students' conceptual understanding. This article describes an algorithm to differentiate the function $f(x)=x^n$. The process is developed through differentiation formula, approximations and a matrix model. In addition, this model is based on determinants and it is verified with the software Excel. Finally, motion situations are characterized by a numerical table, for instance, the height of an object as a time function.
Keywords: Differentiation by differences, variation, function, differential calculus, Excel.

Recepción del artículo: 22.05.2016 Aprobado: 23.06.2016
1* Universidad Autónoma de Ciudad ,Juárez,seflores@uacj.mx

Introducción.

El objeto matemático de la derivada ha representado un problema de aprendizaje para muchos alumnos. Una de las posibles causas del problema de entendimiento de las propiedades de la derivada es la enseñanza tradicional. Este tipo de instrucción se presenta en la mayoría de los cursos de cálculo (Flores, Terrazas, Gonzalez-Quezada, Chavez-Pierce, & Escobedo-Soto, 2008), (Salinas-Martínez, 2001). Esta instrucción se caracteriza por: 1) el instructor es la parte central del proceso, 2) comunicación unidireccional instructor-alumno, 3) uso de problemas convencionales de libro de texto, y 4) falta de contextualización hacia otras áreas de conocimiento. En relación a esto, Flores, González, & Carrillo (2014), Flores, et al., (2015) y González (2013) señalan que la contextualización promueve el desarrollo de procesos de transferencia de conceptos matemáticos. Por estos, una de las alternativas didácticas para ayudar a resolver este problema de aprendizaje es el proceso de variación (Chávez, Flores, & Alfaro, 2013). La contextualización física de la variación a través del uso de tecnología podría desarrollar un entendimiento funcional de conceptos como función, pendiente y rapidez de cambio (Ibarra, Flores, & González, 2015), (González & Flores, 2011). En el cálculo diferencial, las fórmulas de diferenciación están totalmente vinculadas a la pendiente de la recta tangente a una curva dada (Muñoz, 2000). Estas han sido estudiadas en temas de matemáticas como la derivada y sus derivadas sucesivas (De las fuentes, Gonzales, & Valdez, 2003).

En este artículo se muestra el diseño de una metodología para determinar las fórmulas de diferenciación. Esta propuesta permite al alumno transitar por distintos registros de representación semiótica (Ibarra, Flores, & González, 2015). Consideramos el uso de diferencias y sistemas de ecuaciones lineales. Además, el uso de la hoja electrónica para resolver estos sistemas. Se señala que el modelo matricial propuesto para la determinación de fórmulas no se ubica en los libros de texto de matemáticas. Debido a esto y a la importancia didáctica de la variación (Cantoral & Farfán, 1998), consideramos adecuado desarrollar una comprensión más significativa respecto al tratamiento, y el uso de las fórmulas de diferenciación.

Origen del diseño metodológico

Asumimos que las fórmulas de diferenciación se aplican a funciones polinómicas. Posteriormente presentamos el desarrollo propuesto para lograr el acceso al modelo matricial, además de la verificación del modelo mediante el uso de la hoja electrónica de Excel. La figura 1 muestra una secuencia de este modelo. El primer caso es la función f(x) = x^2, donde presentamos dos tipos de tablas de valores. Las primeras 9 tablas muestran el uso de la hoja electrónica para aproximar la pendiente de la recta tangente como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$, empezando con $\Delta x = 1$ y obteniendo los siguientes valores dividiendo Δx por 10, esto para diferentes valores de x. La tabla ubicada a extrema derecha-arriba presenta tres columnas. La segunda columna está formada por las pendientes de las rectas tangentes, obtenidas a través de aproximaciones de las pendientes de las rectas secantes, para luego calcular las diferencias obteniendo los valores de las siguientes tablas. Puede observarse que las primeras diferencias son constantes y tienen un valor de 2. Además, el conjunto de puntos de la forma (*x, mtg(x))* puede ser representado por una expresión polinomial de primer grado cuyo coeficiente de correlación es r = 1.

Figura 1.
Secuencia del cálculo de diferencias para f(x)=x^2.

x		Aprox
0	1	-1
0	0.1	-0.1
0	0.01	-0.01
0	0.001	-0.001
0	0.0001	-0.0001
0	0.00001	-0.00001

x		Aprox
1	1	1
1	0.1	1.9
1	0.01	1.99
1	0.001	1.999
1	0.0001	1.9999
1	0.00001	1.99999

x		Aprox
2	1	3
2	0.1	3.9
2	0.01	3.99
2	0.001	3.999
2	0.0001	3.9999
2	0.00001	3.99999

x	Mtg	dif 1
0	0	
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
	Pendientes	

x		Aprox
3	1	5
3	0.1	5.9
3	0.01	5.99
3	0.001	5.999
3	0.0001	5.9999
3	0.00001	5.99999

x		Aprox
4	1	7
4	0.1	7.9
4	0.01	7.99
4	0.001	7.999
4	0.0001	7.9999
4	0.00001	7.99999

x		Aprox
5	1	9
5	0.1	9.9
5	0.01	9.99
5	0.001	9.999
5	0.0001	9.9999
5	0.00001	9.99999

x		Aprox
6	1	11
6	0.1	11.9
6	0.01	11.99
6	0.001	11.999
6	0.0001	11.9999
6	0.00001	11.99999

x		Aprox
7	1	13
7	0.1	13.9
7	0.01	13.99
7	0.001	13.999
7	0.0001	13.9999
7	0.00001	13.99999

x		Aprox
8	1	15
8	0.1	15.9
8	0.01	15.99
8	0.001	15.999
8	0.0001	15.9999
8	0.00001	15.99999

Pendientes de rectas secantes a la curva f(x)=x^2

La expresión polinomial de primer grado puede escribir como. $m_{tg}(x) = ax + b$ Donde los coeficientes a y b los calculamos mediante un sistema de ecuaciones lineales:

$m_{tg}(1) = a + b = 2$ y $m_{tg}(2) = 2a + b = 4$.

La figura 2 muestra las soluciones a y b .Estas son *a = 2, b = 0.* Así se obtiene entonces la función $m_{tg}(x) = 2x$.

Figura 2.
Soluciones asociadas a un sistema de pendientes como dos funciones lineales

Sistema		
x	ti	y
1	1	2
2	1	4

Determinantes		
D	D1	D2
-1	-2	0

Solución		
a	2	
b	0	

.

A continuación tomemos el caso para las pendientes de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3$. En las tablas de la figura 3 se muestra el uso de la hoja electrónica para aproximar la pendiente de la recta tangente como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$, y obteniendo los siguientes valores dividiendo Δx por 10 para los diferentes valores de x. Obtenemos por aproximación los valores para la pendiente de la recta tangente a *f* en *x*: (M_{tg}(x)). También calculamos las primeras y segundas diferencias como se muestra en la tabla ubicada a extrema derecha-arriba.

Figura 3.

Secuencia del cálculo de diferencias para f(x)=x³

x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox
0	1	1	1	1	1	2	1	7
0	0.1	0.01	1	0.1	2.71	2	0.1	11.41
0	0.01	0.0001	1	0.01	2.9701	2	0.01	11.9401
0	0.001	0.000001	1	0.001	2.997001	2	0.001	11.994
0	0.0001	0.00000001	1	0.0001	2.9997	2	0.0001	11.9994
0	0.00001	1E-10	1	0.00001	2.99997	2	0.00001	11.99994

x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox
3	1	19	4	1	37	5	1	61
3	0.1	26.11	4	0.1	46.81	5	0.1	73.51
3	0.01	26.9101	4	0.01	47.8801	5	0.01	74.8501
3	0.001	26.991001	4	0.001	47.988	5	0.001	74.985
3	0.0001	26.9991	4	0.0001	47.9988	5	0.0001	74.9985
3	0.00001	26.99991	4	0.00001	47.99988	5	0.00001	74.99985

x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox
6	1	91	7	1	127	8	1	169
6	0.1	106.21	7	0.1	144.91	8	0.1	189.61
6	0.01	107.8201	7	0.01	146.7901	8	0.01	191.7601
6	0.001	107.982001	7	0.001	146.979	8	0.001	191.976
6	0.0001	107.9982	7	0.0001	146.9979	8	0.0001	191.9976
6	0.00001	107.99982	7	0.00001	146.9998	8	0.00001	191.9998

Pendientes de rectas secantes a la curva f(x)=x³

x	Mtg	dif 1	dif 2
0	0		
1	3	3	
2	12	9	6
3	27	15	6
4	48	21	6
5	75	27	6
6	108	33	6
7	147	39	6
8	192	45	
	Pendientes		

Ahora observamos en la figura 4 que las segundas diferencias son constantes al valor 6, El conjunto de puntos de la forma (x, mtg(x)) puede ser representado por una expresión polinomial de segundo grado (cuyo coeficiente de correlación es r = 1). La expresión polinomial de segundo grado puede escribirse como $m_{tg}(x) = ax^2 + bx + c$. Los coeficientes a, b y c los calculamos mediante un sistema de ecuaciones lineales:

$$m_{tg}(1) = a + b + c = 3$$
$$m_{tg}(2) = 4a + 2b + c = 12$$
$$m_{tg}(3) = 9a + 3b + c = 27$$

Resolviendo el sistema a través del uso de Excel para calcular las determinantes y mediante la regla de Cramer tenemos que $a = 3, b = c = 0$, entonces obtenemos la función $m_{tg}(x) = 3x^2$.

Revista de Orientación Educacional, 30(57), 83-94, 2016. ISSN 0716-5714 ISSN (e) 0719-5117

Figura 4.
Soluciones asociadas a un sistema de pendientes como tres funciones lineales.

sistema			
x^2	x	ti	y
1	1	1	3
4	2	1	12
9	3	1	27

determinantes			
D	D1	D2	D3
-2	-6	0	0

solución	
a	3
b	0
c	0

Por último calculemos las pendientes de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^4$ En las tablas de la figura 5 se muestra el uso de la hoja electrónica para aproximar la pendiente de la recta tangente. La tabla ubicada a extrema derecha-arriba presenta cuatro columnas, donde la segunda columna está formada por las pendientes de las rectas tangentes. Estas se obtienen a través de aproximaciones de las pendientes de las rectas secantes, para luego calcular las diferencias obteniendo los valores de la misma forma que en las anteriores tablas.

Figura 5.
Secuencia del cálculo de diferencias para f(x)=x⁴

x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox
0	1	-1	1	1	1	2	1	15
0	0.1	-0.001	1	0.1	3.439	2	0.1	29.679
0	0.01	-0.000001	1	0.01	3.940399	2	0.01	31.7608
0	0.001	-1E-09	1	0.001	3.994004	2	0.001	31.96001
0	0.0001	-1E-12	1	0.0001	3.9994	2	0.0001	31.996
0	0.00001	-1E-15	1	0.00001	3.99994	2	0.00001	31.99976

x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox
3	1	65	4	1	175	5	1	369
3	0.1	102.719	4	0.1	246.559	5	0.1	485.199
3	0.01	107.460199	4	0.01	255.0406	5	0.01	498.502
3	0.001	107.946002	4	0.001	255.904	5	0.001	499.85
3	0.0001	107.9946	4	0.0001	255.9904	5	0.0001	499.985
3	0.00001	107.99946	4	0.00001	255.999	5	0.00001	499.9985

x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox	x	Δx	Aprox
6	1	671	7	1	1105	8	1	1695
6	0.1	842.639	7	0.1	1342.839	8	0.1	2009.909
6	0.01	861.842399	7	0.01	1369.063	8	0.01	2044.163
6	0.001	863.784024	7	0.001	1371.706	8	0.001	2047.606
6	0.0001	863.9784	7	0.0001	1371.971	8	0.0001	2047.962
6	0.00001	863.99784	7	0.00001	1371.997	8	0.00001	2047.996

Pendientes de rectas secantes a la curva f(x)=x⁴

x	Mtg	dif 1	dif 2	dif 3
0	0			
1	4	4		
2	32	28	24	
3	108	76	48	24
4	256	148	72	24
5	500	244	96	24
6	864	364	120	24
7	1372	508	144	24
8	2048	676	168	24
	Pendientes			

Con los datos de la tabla extrema-derecha-arriba de la figura 5 observamos en la figura 6 que las terceras diferencias son constantes, lo cual nos indica un comportamiento cúbico de la función, ésto es: $m(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Utilizando determinantes y el método de la regla de Cramer, obtenemos la función que describe las pendientes de las rectas tangentes a $f(x) = x^4$ cómo $m(x) = 4x^3$.

Figura 6.
Soluciones asociadas a un sistema de pendientes como tres funciones lineales.

sistema				
x^3	x^2	x	ti	y
1	1	1	1	4
8	4	2	1	32
27	9	3	1	108
64	16	4	1	256
determinantes				
D	D1	D2	D3	D4
12	48	0	0	0
solución				
		a	4	
		b	0	
		c	0	
		a	0	

Aplicando diferencias, cocientes de diferencias y álgebra lineal para modelar problemas de variación en funciones de una variable.

Presentamos a continuación una propuesta que intenta abordar de forma diferente a la enseñanza tradicional los conceptos de función, de cociente de diferencias y de la definición de la derivada. Esto se puede lograr promoviendo el álgebra y los medios electrónicos, para modelar una expresión que explique un fenómeno a partir de una tabla de valores. Además, el uso de interpretación de resultados y de manipulaciones numéricas apoyados en la tecnología, con el fin de ubicar un punto de encuentro entre el ámbito algorítmico y el conceptual.

Situación física para la implementación de la propuesta

Un objeto cae desde una altura de 500 metros. La altura h del objeto con respecto del suelo irá disminuyendo. La tabla 1 muestra cuatro columnas. La primera columna corresponde al tiempo y la segunda columna proporciona la altura del objeto, así como las correspondientes primeras y segundas diferencias. También nos interesa deducir la fórmula que describa el movimiento de caída del objeto. Para lograrlo se sugieren los siguientes pasos:

- Utilizar diferencias finitas para decidir el tipo de comportamiento que tiene la función.
- Completar los valores que faltan en la tabla.
- Resolver un sistema de ecuaciones para obtener la fórmula que describe este movimiento.

Tabla 1.
Datos del comportamiento de un objeto en caída libre y sus correspondientes diferencias.

t (segundos)	h (metros)	1^{eras} diferencias	2^{das} diferencias
0	500		
1	495.1	-4.9	
2	480.4	-14.7	-9.8
3	455.9		
4	421.6	-34.3	-9.8
5	377.5	-44.1	-9.8
6	323.6		
7	259.9	-63.7	
8	186.4	-73.5	
9	103.1		
10	10	-93.1	-9.8

Solución

Es evidente que las segundas diferencias son constantes, luego el cambio de altura es un comportamiento cuadrático de la forma: $h = at^2 + bt + c$ y haciendo $at^2 + bt + c = y$ se tiene:

si $\boxed{\begin{array}{l} t = 0 \longrightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 500 \\ t = 1 \longrightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 495.1 \\ t = 2 \longrightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 480.4 \end{array}}$ entonces $\boxed{\begin{array}{l} c = 500 \\ a + b + c = 495.1 \\ 4a + 2b + c = 480.4 \end{array}}$

de donde $\boxed{\begin{array}{l} a + b = -4.9 \\ 4a + 2b = -19.6 \end{array}}$ tenemos que $\boxed{\begin{array}{l} a = -4.9 \\ b = 0 \\ c = 500 \end{array}}$ o sea $h(t) = -4.9t^2 + 0t + 500$,o bien $h(t) = 500 - 4.9t^2 = 500 - \frac{1}{2}gt^2$. Una expresión muy utilizada en la física.

Si a las primeras y segundas diferencias las dividimos por el paso

Δt (en el siguiente ejemplo $\Delta t = 0.5$),

obtenemos los valores de la velocidad media (primera razón de cambio), y la aceleración media del objeto (segunda razón de cambio) para cada intervalo:

$$v_m = \frac{h_{k+1} - h_k}{\Delta t} \text{ primera razón, y } a_m = \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} \text{ segunda razón}$$

Se observa en la tabla 2 que la aceleración es constante y equivalente a $-9.8 m/s^2 = -g$. En este caso el objeto se deja caer desde una altura de 100 metros. Las segundas diferencias son constantes, después el cambio de altura es un comportamiento cuadrático de la forma: $h = at^2 + bt + c$ y haciendo $at^2 + bt + c = y$ se tiene:

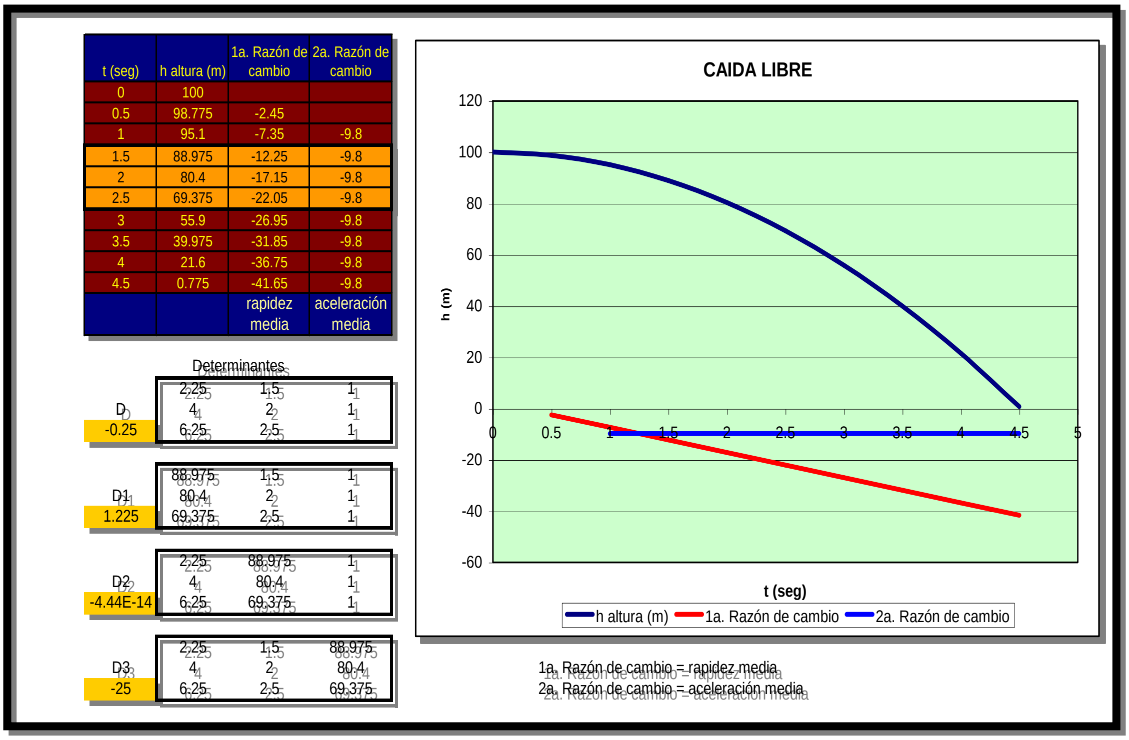
si
$$\begin{aligned} t = 1.5 &\longrightarrow a(1.5)^2 + b(1.5) + c = 88.975 \\ t = 2.0 &\longrightarrow a(2.0)^2 + b(2.0) + c = 80.4 \\ t = 2.5 &\longrightarrow a(2.5)^2 + b(2.5) + c = 69.375 \end{aligned}$$
entonces
$$\begin{aligned} a &= \frac{D1}{D} = \frac{1.225}{-0.25} = -4.9 \\ b &= \frac{D2}{D} = \frac{0}{-0.25} = 0 \\ c &= \frac{D3}{D} = \frac{-25}{-0.25} = 100 \end{aligned}$$

La función que describe la altura del objeto es $h(t) = at^2 + bt + c = -4.9t^2 + 100$ La figura 7 muestra las gráficas de la función original con sus primeras y segundas diferencias obtenidas de una Hoja Excel.

Tabla 2.
Hoja de Excel para los cálculos de la primera y la segunda razón de cambio.

t (seg)	**h** altura (m)	1a. Razón de cambio	2a. Razón de cambio
0	100		
0.5	98.775	-2.45	
1	95.1	-7.35	-9.8
1.5	88.975	-12.25	-9.8
2	80.4	-17.15	-9.8
2.5	69.375	-22.05	-9.8
3	55.9	-26.95	-9.8
3.5	39.975	-31.85	-9.8
4	21.6	-36.75	-9.8
4.5	0.775	-41.65	-9.8

Figura 7.
Gráficas de primeras y segundas diferencias.



Conclusiones

La presente propuesta permite el uso del software Excel para manipular y construir el concepto de la derivada. Este se expone en un proceso de aprendizaje no solo en su propio contexto, sino también en un ámbito físico. Las primeras y segundas diferencias permiten al estudiante visualizar el proceso de la obtención de la primera, y la segunda derivada en un registro numérico. Esto con la gran posibilidad del desarrollo de una habilidad de los estudiantes para transitar entre distintos registros de representación semiótica (numérico, analítico y gráfico). Este trabajo es un ejemplo de la manera en que se aborda un problema de aplicación de la derivada. Esto con el fin de ir más allá de lo planteado en los textos, con el propósito educativo del desarrollo de la curiosidad científica, y las habilidades cognitivas del estudiante. También representa una oportunidad para aprovechar la tecnología, como una herramienta de apoyo a la docente en la enseñanza del Cálculo. Es trabajo del profesor promover las adaptaciones o mejoras a lo aquí expuesto, para desarrollar un diseño didáctico adecuado de este o cualquier otro problema relacionado con el concepto de variación. Finalmente, la Parte 2 de este reporte de investigación mostrara tanto el proceso, como los resultados de la implementación. Esta propuesta se implementará no solo en el salón de clase, sino también en el laboratorio de matemáticas. Los alumnos de la materia de Cálculo I serán expuestos a actividades de aprendizaje. Estas actividades posiblemente desarrollarán el entendimiento funcional de la derivada como razón de cambio. Además, se expondrá a estos alumnos a rutinas de aprendizaje en contextos físicos, a través del concepto de la derivada en situaciones reales de variación.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introduccion al analisi. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales*,(42),353-372.

Chavez, J. E., Flores, S. & Alfaro, L. L. (2013). *El desarrollo de los niveles de abstraccion.* España: l Academica Espanola.

De las fuentes, M., Gonzales, O. & Valdez, C. (2003, dic.). Una alternativa para la determinacion de las fórmulas de suma. *Mosaicos Matemáticos*, (11), 87-93.

Flores, S., Gonzalez, M. D., & Carrillo, V. (2014). *Transfer of learning from mechanics to electricity and magnetism: transfer of knowledge measure indicators from classical mechanics to electricity and magnetism.* Alemania: Scholar's press.

Flores, S., Luna, J., Chavez-Pierce, J., Gonzalez, M., González-Demoss, M. & Hernández-Palacios, A. (2008, ene-feb.). El aprendizaje de la física y las matemáticas en contexto. *CulCyT,*año 5(24),19-24.

Flores, S., Terrazas, S., Gonzalez-Quezada, M. D., Chavez-Pierce, J. E., & Escobedo-Soto, S. (2008). Student use of vectors in the context of acceleration. *Revista Mexicana de Fisica*,*54*(2), 133-140.

Gonzalez, M. D. & Flores, S. (2011). *Integral de linea en el entendimiento de la teoria electromagnetica: integral de linea como una suma de productos punto.* Espana: Editorial Americana Espanola.

Gonzalez, M., Flores, S., & Gutierrez , R. (2013). *Transfer and measures of transfer.* Las Cruces, México: NMSU.

Ibarra, E., Flores, S. & Gonzalez, D. (2015). *Proceso de entendimiento del concepto de funcion cuadratica: A traves de registros de representacion semiotica en contexto fisico.* Saarbrucken, Alemania: Academica Espanola.

Muñoz, G. (2000). Elementos de Enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*,3(2), 131-170.

Salinas-Martínez, P. (2001). Elementos del cálculo: reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza.México: Trillas.