

## **LA CONJETURACIÓN EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD USANDO REFERENTES GEOMÉTRICOS MEDIADOS POR SIMULACIONES EN GEOGEBRA.**

### **CONJECTURING PROBABILITY PROBLEMS USING GEOMETRICAL FEATURES THROUGH GEOGEBRA**

**Mario Silvino Ávila Sandoval<sup>1</sup>, Héctor Jesús Portillo Lara, Carlos López Ruvalcaba, María de los Ángeles Cruz Quiñones, Sergio Flores**

---

#### RESUMEN

---

Este trabajo muestra la naturaleza de las conjeturas realizadas por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, generadas por el planteamiento de diversos problemas de Probabilidad y simulaciones manipulables, realizadas en Geogebra. Se seleccionó dos estudiantes como parte de la metodología para un estudio de casos. Dichos alumnos, después de trabajar los problemas probabilísticos con un corte geométrico y con ayuda del software, realizaron un ejercicio sin simulación alguna. Esto para identificar la construcción de estrategias para resolver problemas de probabilidad, representándolos geoméricamente y en ese contexto. Se concluyó la importancia que tiene el incorporar la tecnología digital en la enseñanza de la probabilidad, así como el recurrir a otros contextos como el geométrico para plantear y resolver problemas.

Palabras Clave: Probabilidad geométrica, Geogebra, Simulación, Conjeturación.

---

#### ABSTRACT

---

This study presents the nature of the students' thinking at the time of making conjectures about problems of Probability manipulating Geogebra simulation. A case study was implemented. It includes two college students of mathematics. The participating students worked on probability problems with geometrical features using the Geogebra software. After that, students are asked to solve problems without the use of Geogebra simulation. This was performed to identify how students build their strategies for solving probability problems with geometrical representation. We conclude that technology integration in teaching probability is of great relevance. Indeed, using different contexts such as geometrical features may help to analyze and solve probability problems.

Keywords: Geometric Probability, Geogebra, Simulation, Conjecturing.

## **Temática:**

Conjeturación de los estudiantes como efecto de la manipulación de simuladores en el contexto de la probabilidad geométrica.

## **Introducción**

La enseñanza de la probabilidad enfrenta un sin número de retos muchos de ellos relacionados con las dificultades propias de la disciplina. La matemática de la probabilidad es muy compleja, y sus resultados suelen ser bastante contraintuitivos (Batanero, 2003). Una de las formas en que es posible afrontar los desafíos de la enseñanza es incorporando a ella los recursos tecnológicos disponibles en la actualidad. Esto con la finalidad de dotar a los estudiantes con un mayor número de experiencias en los problemas de probabilidad, para con ello, los alumnos puedan generar estrategias de solución de problemas. Diversas investigaciones (Roa 2000 y Roa *et al*, 2003) muestran que sólo una minoría de estudiantes universitarios analizan los fenómenos aleatorios desde un punto de vista formal de la teoría de probabilidad y utilizan correctamente los procedimientos necesarios para el cálculo de probabilidad de un evento. La enseñanza de la probabilidad no es fácil en ningún nivel educativo, por lo tanto, es necesario promover su estudio, utilizando tareas tanto de resolución como de planteamiento de problemas en donde se pongan en juego contenidos en diversos contextos (Penalva, Posadas y Roig, 2010).

## **Entornos dinámicos y la enseñanza de las matemáticas**

Hace más de tres décadas el profesor Santaló (1982) preveía la importancia que revestiría la computadora en la enseñanza de la matemática en general y particularmente, en la probabilidad, al enunciar que la tecnología, en su gran espectro de posibilidades, se va introduciendo en todas las actividades del hombre, cada vez de manera más simple y más potente. Las ideas probabilistas predominan cada vez más sobre las ideas deterministas, se actúa en base a estadísticas y números aproximados, más que sobre datos o resultados exactos. La gran mayoría de fenómenos con que debemos enfrentarnos, como nuestra propia existencia el día de mañana, son aleatorios. Actuamos más sobre hechos posibles, que sobre acontecimientos seguros. Sin embargo, poco o nada se habla en nuestros centros de enseñanza de las posibilidades de la computación ni de las distintas maneras de tratar el azar. Este hecho, parece haber cambiado muy poco, ya que la enseñanza de la probabilidad sigue, en términos generales, desarrollándose de manera preponderantemente tradicional, es decir, en los entornos de lápiz, papel, gis y pizarrón (Casas, 2014).

La presencia de los instrumentos digitales produce, hoy en día, conflictos de validación cuando se introducen en la enseñanza de las matemáticas. Estos conflictos pueden ilustrarse así: la presencia de estas tecnologías erosiona las líneas curriculares tradicionales, pues allí hay un conocimiento y unos tratamientos que han alcanzado cierta estabilidad ante la cual irrumpen las tecnologías digitales. La tensión entre la manera estática de pensar las matemáticas, tal y como ha sido nutrida por la enseñanza hasta hoy en día y las nuevas formas propiciadas por los medios digitales no puede conducir a una ruptura. Tiene que hallarse una vía intermedia que permita su fusión (Moreno-Armella, 2011).

Un uso apropiado de la tecnología digital, refiriéndonos particularmente a un entorno de geometría dinámica como el que propicia el Geogebra, provoca que los estudiantes tengan acceso a conjeturar y generalizar por medio de dar "clicks" y arrastrar determinados puntos sobre un objeto, el cual, dinámicamente re-dibuja y actualiza información en la pantalla mientras el usuario arrastra el ratón, haciendo esto, el usuario puede eficientemente probar largas iteraciones de la construcción matemática (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). De esta forma el trabajo en Geogebra permite estimular la observación, la experimentación y la generalización, así como la elaboración de conjeturas, su verificación experimental, permitiendo que el alumno no se pierda en construcciones intermedias y su posterior demostración (Madama y Curbelo, 2012). La manipulación del entorno geométrico permite la ampliación de la experiencia posible del estudiante. Dado el control formal del entorno, las experiencias desarrolladas dentro del micromundo pueden considerarse como genuinas experiencias matemáticas (Moreno-Armella, 2002). La utilización del programa permite agilidad, ya que se aumenta la cantidad de casos que se pueden observar, además de generar mayor certeza al trabajar determinado tema. De esta forma la observación de imágenes implica un trabajo no rutinario, lo cual no significa que no se realice un trabajo manual, pues es también importante y necesario (Madama y Curbelo, 2012).

Al entrar a la segunda década del nuevo siglo, parece haber unanimidad internacional sobre la importancia de la educación. Los países toman acciones para crear bases de sustentación estables con este propósito. Es tangible que los sistemas educativos tendrán que incorporar inmensos desarrollos científicos y tecnológicos alcanzados en las últimas décadas (Moreno-Armella, 2011). Para lograr esto, necesitamos crear estrategias de transición tempranas para transformar contenidos básicos de este cuerpo estable del conocimiento matemático (como es el caso de la probabilidad) en nuevos apoyos semióticos digitales (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008).

## **La probabilidad geométrica y el uso de la tecnología**

¿Por qué cuando se explica el concepto de probabilidad se prescinde de conceptos como el de área o el de longitud? ¿Por qué prescindir de la geometría cuando el alumno comienza a tener contacto con el azar? (Ruiz, 2001). La probabilidad geométrica extiende la idea que el cálculo de probabilidades está sólo asociado con la enumeración, ya que, para calcular probabilidades geométricas hace falta medir. Se pueden formular problemas que expresen relaciones entre segmentos, áreas o volúmenes y problemas para cuya resolución sea conveniente usar ejes coordenados (Agnelli, Peparelli y Zón, 2010). La diferencia entre contar y medir distingue a la aritmética de la geometría (Ruiz, 2001).

Por otro lado, es indudable el beneficio que reportan los simuladores para realizar un gran número de experimentos aleatorios. Se llama simulación a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente, que permite obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al experimento en cuestión. La simulación tiene la ventaja de realizar un número muy importante de experimentos en muy corto tiempo (Villalba y López, 2012). La simulación o sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente, como modelo pseudo-concreto de la situación modelizada, permite prescindir del aparato matemático para analizar situaciones estocásticas (Batanero, 2003). Existe una variedad de problemas y situaciones que son susceptibles de ser simulados utilizando el Geogebra, de tal manera que permitan al estudiante, realizar conjeturas sobre las situaciones y hasta deducir alguna estrategia de solución de problemas.

## **Metodología de la investigación**

Esta investigación es de corte cualitativa por que pretende explorar la naturaleza de las conjeturas elaboradas por los estudiantes, ante problemas de probabilidad, mediados por simulaciones manipulables realizadas en Geogebra. Se implementó como estrategia el estudio de casos, para entender el razonamiento utilizado por dos estudiantes que pertenecen al programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.

El proceso metodológico de la investigación consistió en presentar primeramente un problema de probabilidad, estrictamente en el contexto geométrico, seguido de la simulación del mismo, con el fin de introducir a los estudiantes a problemas de este tipo y evidenciar el papel que juega la simulación en la construcción de conjeturas y procesos de solución.

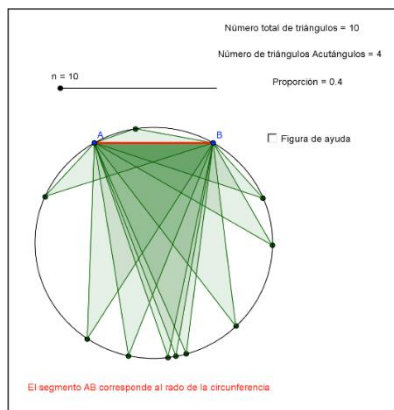
Posterior a ello, se propusieron dos problemas susceptibles de ser transpuestos al mundo geométrico, motivados por la simulación hecha en Geogebra. De igual manera, la pretensión era reconocer el rol de la simulación en la construcción de conjeturas y estrategias de solución. Finalmente se propuso un problema que, sin el apoyo de simulación alguna, los estudiantes debían resolver, esto para observar, si habían interiorizado el uso de representaciones geométricas para dar solución a problemas de probabilidad elemental. Se recolectó información por medio de observaciones realizadas al momento de la manipulación del software y por medio de los escritos y soluciones propuestas por los alumnos.

## Resultados

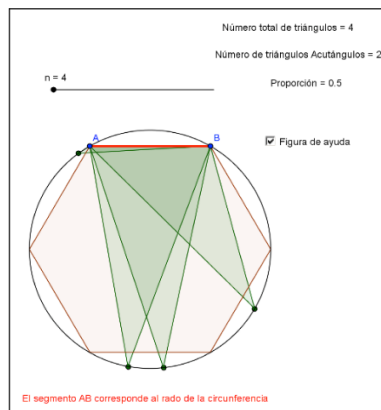
Se analizaron los razonamientos mostrados por los dos estudiantes en base a sus anotaciones ante los problemas propuestos.

El primer problema se planteó basado en la propuesta publicada por Rochera (2010). El ejercicio indica lo siguiente: En una circunferencia se traza una cuerda AB cuya longitud equivale al radio de ésta. Si se coloca un punto C al azar sobre la circunferencia, ¿Cuál es la probabilidad que el triángulo ABC sea acutángulo (todos sus ángulos agudos, es decir, menores de 90 grados)?

Se solicitó a los estudiantes manipular la simulación en Geogebra, previamente diseñada por los investigadores. Posteriormente se les solicitó realizar conjeturas sobre la solución del problema basadas en la simulación, la cual contenía un botón de ayuda. Las figuras 1 y 2 muestran la apariencia de las simulaciones.



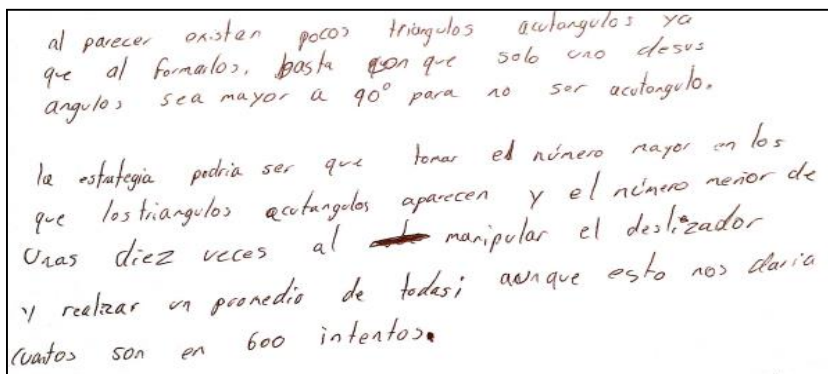
**Figura 1.** Simulación de triángulos sin ayuda activada.



**Figura 2.** Simulación de triángulos con la ayuda activada.

El estudiante al que llamaremos A, generó a partir de la manipulación con el deslizador de la simulación, sus conjeturas que se muestran en la figura 3:

**Figura 3.** Conjetura del estudiante A

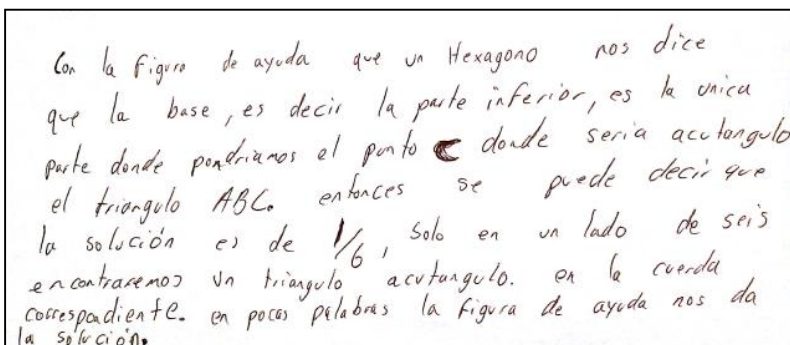


al parecer existen pocos triángulos acutángulos ya que al formarlos, basta con que solo uno de sus ángulos sea mayor a  $90^\circ$  para no ser acutángulo.

la estrategia podría ser que tomar el número mayor en los que los triángulos acutángulos aparecen y el número menor de unas diez veces al ~~manipular~~ manipular el deslizador y realizar un promedio de todas; aunque esto nos daría cuántos son en 600 intentos.

Dado que la simulación podía construir hasta 600 triángulos, el estudiante, de inicio optó por una solución numérica promediada, es decir, usó la proporción otorgada por la simulación como el valor de la probabilidad y pretendió manipular repetidamente la simulación con los 600 triángulos para obtener un promedio. Sin embargo, cuando hizo uso del botón de ayuda de la simulación, redirigió sus conjeturas al dominio geométrico de manera natural, permitiéndole llegar a la solución del problema como lo muestra la figura 4.

**Figura 4.** Estrategia de solución del estudiante A sobre el problema 1.



Con la figura de ayuda que un Hexágono nos dice que la base, es decir la parte inferior, es la única parte donde pondríamos el punto  $C$  donde sería acutángulo el triángulo  $ABC$ . entonces se puede decir que la solución es de  $\frac{1}{6}$ , solo en un lado de seis encontraremos un triángulo acutángulo. en la cuerda correspondiente. en pocas palabras la figura de ayuda nos da la solución.

El estudiante B, realizó una conjetura similar como puede verse en la figura 5.

**Figura 5.** Estrategia de solución del estudiante B sobre el problema 1.

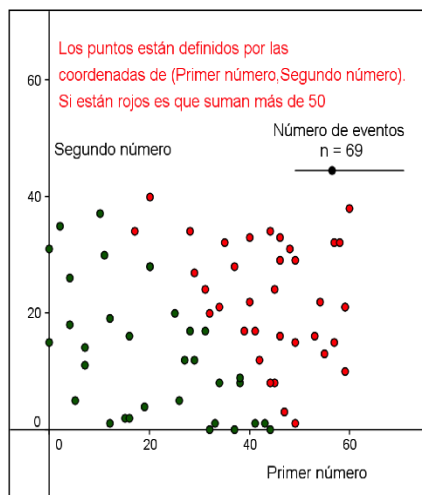
Formamos un hexagono con lados iguales de distancia  $AB = A'B'$  y se observa el área ó probabilidad de obtener un  $\Delta$  acutangulo, que es solo un lado de nuestro hexagono, por lo tanto la probabilidad es  $\frac{1}{6}$ .

De igual manera, para el segundo y tercer problema, se presentaron a los estudiantes simulaciones previamente elaboradas en Geogebra. Los problemas propuestos se enuncian textualmente como sigue:

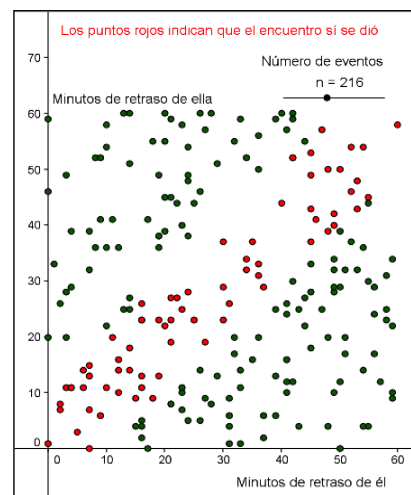
Problema 2. Se eligen al azar dos números. Uno entre el 0 y el 60 y otro entre el 0 y el 40. ¿Cuál es la probabilidad que la suma de los dos números sea 50 o más?

Problema 3. Un chico con fama de impuntual invita a salir a una chica y la cita en cierto lugar. Ella que conoce su reputación le dice: sí iré entre las 5 y las 6 de la tarde pero sólo te esperaré como máximo 10 minutos, si no te veo me voy. El chico responde: yo también iré entre 5 y 6 de la tarde, te esperaré 10 minutos como máximo y si no llegas me voy. ¿Cuál es la probabilidad de que el encuentro se dé? (Miró, 2013).

Las figuras 6 y 7 muestran el aspecto de ambas simulaciones. En ellas se representan por puntos rojos, cuando el evento resulta favorable a la situación planteada.



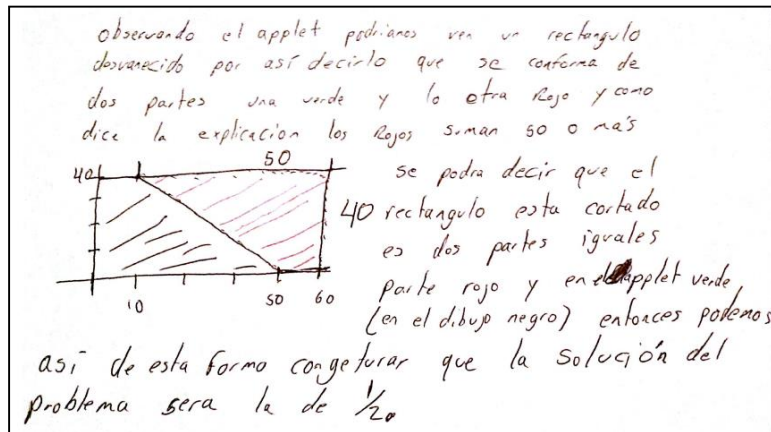
**Figura 6.** Simulación del problema 2.



**Figura 7.** Simulación del problema 3.

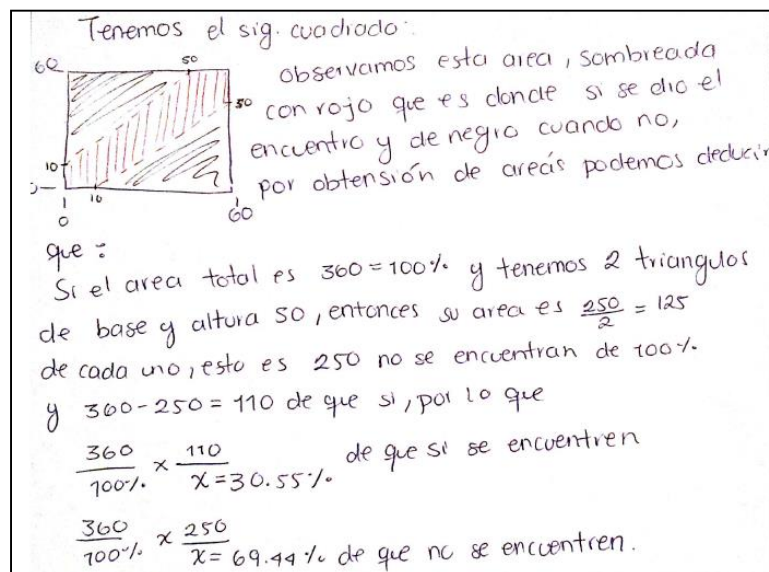
La "adaptación" de un problema no geométrico (a diferencia del primero) resultó prácticamente natural, como lo muestra lo plasmado por el estudiante A para el problema 2 ilustrado en la figura 8.

**Figura 8.** Conjetura realizada del alumno A sobre el problema 2.



De manera similar lo reflejó el estudiante B en la solución (obtenida correctamente) del problema 3 como lo muestra la figura 9.

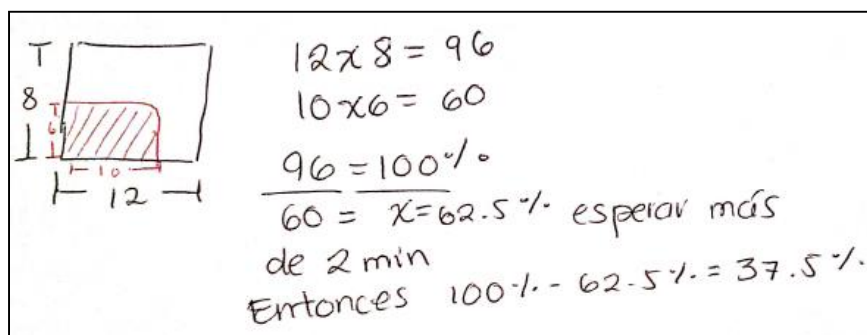
**Figura 9.** Estrategia de solución del estudiante B sobre el problema 3.





Al plantear el problema 4, sin la ayuda de simulación, teniendo la expectativa que, de manera espontánea, los alumnos realizaran una representación geométrica del problema, sólo el estudiante B lo resolvió de tal forma. Este problema enunciaba de manera textual lo siguiente: Por cierta esquina pasan 2 líneas de autobuses urbanos que van al centro de la ciudad, la A y la B. Ni una ni otra tiene un horario fijo para pasar por la esquina, pero eso sí, sabemos que los camiones de la primera línea pasan cada 8 minutos, mientras que los autobuses de la línea B pasan cada 12 minutos. Determine: a) ¿Cuál es la probabilidad de que al llegar yo a la esquina, tarde cuando mucho 2 minutos esperando? y b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer camión que pase sea de la línea A? (Rochera, 2010). En la figura 10 se muestra un extracto de la solución planteada por este alumno.

**Figura 10.** Planteamiento del problema 4 realizado por el estudiante B.



### Conclusiones.

El presente artículo reveló la importancia de incorporar la tecnología digital en la enseñanza de la probabilidad, así como el recurrir a otros contextos como el geométrico para plantear y resolver problemas. La investigación realizada muestra que simulaciones realizadas en Geogebra, pueden direccionar a los estudiantes al uso de elementos geométricos en la solución de problemas. El control que tienen los alumnos al poder, a voluntad, repetir tantas veces como quieran un experimento probabilístico, constituyó un elemento de validación en el primer problema en los estudiantes. Por otro lado, la simulación en el primer problema provocó la redirección en uno de los estudiantes, de una estrategia numérica a una geométrica. En términos generales podemos afirmar que el uso de la simulación en el entorno dinámico del Geogebra, constituye una experiencia adicional en los estudiantes que les permite

explorar nuevas estrategias de solución de los problemas de probabilidad y lograr la traducción al contexto de la geometría.

Los resultados obtenidos con dos estudiantes son alentadores. En el futuro se planea profundizar con un mayor número de estudiantes y una mayor diversidad de problemas susceptibles de ser trabajados en esta línea de investigación, basada en la resolución de problemas de probabilidad llevados al contexto geométrico y mediados con el Geogebra, con la finalidad de que las conclusiones obtenidas tengan un mayor alcance.

### Referencias Bibliográficas

- Agnelli H., Peparelli S. & Zón N. (2010). Ampliando los recursos para enseñar probabilidades usando geometría. En M. Ascheri, R. Pizarro & N. Ferreyra (Eds.). *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática*. (pp. 37-40). Santa Rosa, Argentina: Universidad Nacional de La Pampa.
- Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 37-54.
- Casas, N. (2014). Metodología para enseñar probabilidad y estadística mediante juegos de magia en matemáticas de 3º de ESO. Recuperado en:  
<http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2424/casas.bern.as.pdf?sequence=>
- Madama, M. & Curbelo, M. (2012). Visualizar, conjeturar y demostrar utilizando el software Geogebra. En M. Dalcín & V. Molfino, (Eds). *Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra Uruguay*. (pp. 117-124). Uruguay: Consejo de Formación en Educación ANEP.
- Miró, R. (2013). *Tres problemas de probabilidad geométrica*. Recuperado de <http://rinconmatematico.com/miro/probgeom/probgeom.htm>
- Moreno-Armella, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En Ministerio de Educación Nacional (Eds). *Memorias del Seminario Nacional de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (pp. 87-92). Bogotá, D.C., Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Moreno-Armella, L., Hegedus S. & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111.

- Moreno-Armella, L. (2013). ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la educación matemática? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 307-315.
- Penalva, M., Posadas, J. y Roig, A. (2010). Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, 22(3) 23-54.
- Rochera, J. (2010). *Problemas geométricos. Soluciones*. Taller de talentos Matemáticos. Recuperado de <http://www.unizar.es/ttm/2009-10/ProblemGeomSoluciones.pdf>
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. (Tesis Doctoral). Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TesisRoa.pdf>.
- Roa, R., Batanero, C. & Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, 15(2), 5-25.
- Ruiz, G. (2001). Sobre la utilidad de la geometría en la enseñanza de la probabilidad. *Suma*, 37, 67-74.
- Santaló L. (1982). *Computación y probabilidad en educación*. Recuperado de <http://cimm.ucr.ac.cr/luissantalo/pdfs/Articulos%20de%20Luis%20Santaló/De%20otros%20temas/Computacion%20y%20probabilidad%20en%20educacion.pdf> el 23 de marzo de 2013.
- Villalba, M. & López, A. (2012). Los applets geogebra en la enseñanza de la probabilidad. En M. Dalcín & V. Molfino, (Eds). *Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra Uruguay*. (pp. 64-71). Uruguay: Consejo de Formación en Educación ANEP.